計算基礎論(O) 期末試験

2005.7.20(水)

問題は全部で 4 問です。

<問題 1>

以下の関数が原始帰納的であることを示しなさい。必要なら 1, ＋, $\ominus$, eq?, leq? が原始帰納的であることを用いて構いません。教科書の定義 3.1 に厳密に合わせる必要はありません。

(1) max(x,y) (x と y の大きい方を返す関数)

(2) min(x,y) (x と y の小さい方を返す関数)

(3) less?(x,y) = [x < y]

(4) neq?(x,y) = [x $\neq$ y]

<問題 2>

(1) 原始帰納的述語 p?(x,y)に対し、以下のような $f(x_1,x_2)$を考えます。

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} p?(x_1,y)=\text{真となる最小の } y, & \exists y < x_2[p?(x_1,y)]\text{のとき} \\ x2 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

この関数を $\mu_{y<x2}[p?(x_1,y)]$と記述し、限定 μ-演算と呼びます。限定 μ-演算が原始帰納的であることを示しなさい。

(2)div(x,y) = (x を y で割った商)を限定 μ-演算を用いて定義しなさい。

<問題 3>

以下の λ-式を β-変換し、正規形を求めなさい。

(1) $(\lambda x.x(\lambda ab.a))(\lambda x.x)$

(2) $(\lambda xyz.(xz)(yz))(\lambda uv.u)(\lambda ab.a)$

(3) $(\lambda xy.yx)(\lambda z.zy)$

<問題 4>

(1) add(x,y)=x+y を計算する〚add〛の λ-式を〚inc〛を使って定義しなさい。

(2)(1)の λ-式を用いて〚add〛〚2〛〚3〛を計算しなさい。ただし〚inc〛〚n〛 $\to^*_\beta$ 〚n+1〛を使って構いません。

(3)mult(x,y)=x×y を計算する〚mult〛の λ-式を(必要なら〚add〛や〚0〛を使って)定義しなさい。

(4) (3)の λ-式を用いて〚mult〛〚2〛〚3〛を計算しなさい。ただし〚add〛〚m〛〚n〛 $\to^*_\beta$ 〚m+n〛を使って構いません。