離散構造とアルゴリズム　O　（上野）
期　末　試　験

2004年8月2日(月）15:00〜16:30

講義録・ノート等参照不可

100点満点　10点/問

8月12日(木) 以降に答案と模範解答を南3号館411号室前で配付します.

問題1 各点の次数が高々2である連結グラフ G に関する以下の問に答えよ.

問1 G の点数を n としたとき，G の異なる全域木の数はいくつか.

問2 G がハミルトングラフであるための必要十分条件を示せ.

問3 G がハミルトングラフであるか否かを判定する線形時間のアルゴリズムを設計せよ.

問4 $1 \leq \chi(G) \leq 3$ であることを示せ.

問5 G の彩色数を求める線形時間のアルゴリズムを設計せよ.

問6 G のすべての独立点集合の族を $\mathcal{I}$ としたとき，$(V(G), \mathcal{I})$ はマトロイドであるとは限らないことを示せ.

問題2 グラフの独立点集合に関する以下の問に答えよ.

問7 **独立点集合判定問題**

入力：グラフ G，正整数 k
質問：G に点数 k 以上の独立点集合が存在するか.

はNPに属すことを示せ.

問8 グラフ G の完全グラフである部分グラフを G のクリークという.

クリーク判定問題

入力：グラフ H，正整数 h
質問：H に点数 h 以上のクリークが存在するか.

はNP完全であることが知られている．このことを用いて，**独立点集合判定問題**はNP完全であることを示せ.

問9 q を自然数の定数としたとき，**独立点集合判定問題**の部分問題：

独立 q 点集合判定問題

入力：グラフ G
質問：G に点数 q 以上の独立点集合が存在するか.

はPに属すことが知られている．実際にこの問題を解く $O(n^q)$ 時間のアルゴリズムを設計せよ．ここで，n は G の点数である.

問10 **問9**のアルゴリズムを用いて**独立点集合判定問題**を多項式時間で解くことはできない．この理由を説明せよ.

離散構造とアルゴリズム　O　（上野）
期　末　試　験　模　範　解　答

2004 年 8 月 2 日 (月) 15:00〜16:30

100 点満点　10 点/問

最高：100 点　最低：0 点　平均：61 点

解答あるいは採点に関する質問は 8 月 17 日 (火) まで受け付けます．

問題 1

問 1 G はパスか閉路である．G がパスであるとき，G の異なる全域木の数は 1 である．また，G が閉路であるとき，G の異なる全域木の数は n である．

問 2 G がハミルトングラフであるための必要十分条件は，G が閉路であることである．あるいは，G がハミルトングラフであるための必要十分条件は，すべての点の次数が 2 であることである．

問 3 以下のアルゴリズムの正当性は問 **2** から明らかである．また，これが線形時間アルゴリズムであることも明らかである．

ステップ 1　：$v \in V(G)$ を任意に一つ選ぶ．

ステップ 2　：$\deg_G(v) \leq 1$ ならば,「No」を出力して終了する．

ステップ 3　：$V(G) = V(G) - \{v\}$ とする．

ステップ 4　：$V(G) = \emptyset$ ならば,「Yes」を出力して終了する．そうでなければ，ステップ 1 に戻る．

問 4 G がパスであるとき，G は 2 部グラフであるから，$1 \leq \chi(G) \leq 2$ である．また，G が閉路であるとき，G が偶閉路ならば，G は 2 部グラフであるから，$\chi(G) = 2$ であり，G が奇閉路ならば $\chi(G) = 3$ である．したがって，$1 \leq \chi(G) \leq 3$ であることが分かる．

問 5 以下のアルゴリズムの正当性は問 **4** から明らかである．また，これが線形時間のアルゴリズムであることも明らかである．

ステップ 1　：$v \in V(G)$ を任意に一つ選ぶ．

ステップ 2　：$\deg_G(v) = 0$ ならば,「$\chi(G) = 1$」と出力して終了する．

ステップ 3　：$\deg_G(v) = 1$ ならば,「$\chi(G) = 2$」と出力して終了する．

ステップ 4　：$V(G) = V(G) - \{v\}$ とする．

ステップ 5　：$V(G) \neq \emptyset$ ならば，ステップ 1 に戻る．

ステップ 6　：n が偶数ならば,「$\chi(G) = 2$」と出力して終了する．

ステップ 7　：「$\chi(G) = 3$」と出力して終了する．

問 6 反例を示す．G が 3 点 $\{1, 2, 3\}$ から成るパスで，点 1 と 3 の次数が 1 であるとき，

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$$

であるが，$\{2\}$ に $\{1, 3\}$ のいずれの要素を付加しても独立集合が得られないので，$(V(G), \mathcal{I})$ はマトロイドではない．

問題 2

問 7 G の点数 k 以上の独立点集合 S が「YES」の証拠として与えられたとき，S の任意の 2 点が隣接していないことと $|S| \geq k$ であることを多項式時間で確認できるので独立点集合判定問題は NP に属す．

問 8 グラフ H に対して，

$$V(\overline{H}) = V(H), E(\overline{H}) = \{(u,v) | (u,v) \notin E(H)\}$$

とグラフ $\overline{H}$ を定義すると，明らかに $\overline{H}$ は多項式時間で計算できる．H のクリークは $\overline{H}$ の独立点集合と 1 対 1 に対応しているので，クリーク判定問題の入力 H と h に対して，独立点集合判定問題の入力 $G = \overline{H}$ と $k = h$ を対応させる写像は，クリーク判定問題から独立点集合判定問題への多項式時間還元である．クリーク判定問題は NP 完全であり，クリーク判定問題 $\propto$ 独立点集合判定問題であるから，問 7 と合わせて，独立点集合判定問題も NP 完全であることが分かる．

問 9 以下のアルゴリズムは全ての場合を尽くしているが，q は定数であるので，計算時間は

$$O\left(\binom{n}{q}\right) = O(n^q)$$

で多項式オーダである．

- まず，全ての q 点集合を生成し；
- 次に，各々の q 点集合が独立点集合か否かを調べる．
  - q 点から成る独立点集合が見つかったら，「YES」を出力して終了する．
  - q 点から成る独立点集合がなければ，「NO」を出力して終了する．

問 10 一般には，独立点集合判定問題の入力の k は定数ではない．例えば $k = \Omega(n)$ であるときには，$O(n^k)$ は多項式オーダではない．したがって，問 9 のアルゴリズムは独立点集合判定問題を解く多項式時間アルゴリズムではない．